1. Kurzfassung:

Es wird eine nichtlineare Filterkette mit folgenden Eigenschaften konstruiert:

- **Sie eliminiert alle Bilddetails, deren Größe und Kontrast unterhalb vorgegebener Schranken liegen.**
- **Sie erhält die größeren oder kontrastreicheren Bildstrukturen und versteilert deren Kanten.**
- **Sie ist massiv parallelisierbar.**

$\mathcal{P}$ Menge der Bildpunkte, $f: \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ Grauwertfunktion, $g_\sigma(t) = \exp(-\frac{t^2}{2\sigma^2})$

2. Lineares Gaußfilter:

$$G_{\sigma_x} f(p) = \frac{1}{N_p} \sum_{q \in \mathcal{P}} g_{\sigma_x}(\|q-p\|) f(q), \text{ wobei } N_p = \sum_{q \in \mathcal{P}} g_{\sigma_x}(\|q-p\|).$$

3. Nichtlineares Gaußfilter:

$$G_{\sigma_x,\sigma_z} f(p) = \frac{1}{N_p} \sum_{q \in \mathcal{P}} g_{\sigma_x}(\|q-p\|)\, g_{\sigma_z}(f(q)-f(p))\, f(q),$$

$$\text{wobei } N_p = \sum_{q \in \mathcal{P}} g_{\sigma_x}(\|q-p\|)\, g_{\sigma_z}(f(q)-f(p)).$$

Die Gewichte der Mittelung hängen also nicht nur von der Entfernung der Pixel q zu dem zentralen Pixel p ab, sondern auch noch von den Grauwerten, und zwar wird der Grauwert $f(q)$ eines Pixels q umso weniger gewichtet, je mehr er von dem Grauwert $f(p)$ des Pixels p abweicht. Dadurch werden Grauwertkanten, deren Kontrast σ_z deutlich übersteigt, kaum verschmiert.(Robuste Schätzer in der Statistik)

4. Nichtlineare Filterkette:

Der kantenerhaltende Glättungseffekt wird wesentlich verbessert, wenn einige Filterstufen hintereinander geschaltet werden.

Zur Verdeutlichung wird das Grauwertprofil einer Zeile nach den einzelnen Filterschritten gezeigt (112-te Zeile des Bildes “Lena”).

Wichtige Gesichtspunkte:

4.1 Geeignete Abstufung der Parameterwerte der einzelnen Filterstufen

Es läßt sich begründen, daß die Filterkette gute Ergebnisse liefert, wenn jeweils vor Ausführung des nächsten Filterschritts der Wert von σ_x verdoppelt und der von σ_z halbiert wird.

4.2 Versteilerung von Kanten

Grauwertkanten, die in den ersten Filterstufen etwas verschmiert werden, können in den nachfolgenden Stufen wieder versteilert werden. (Vgl. in folgenden Grauwertprofilen den linken Buckel.)

5. Praktische Implementierung

5.1 Abschneiden der Gewichtsfunktionen

Die Summation wird nicht über alle Pixel $q \in \mathcal{P}$ erstreckt, sondern nur über diejenigen innerhalb des Quadrats mit Mittelpunkt p und Seitenlänge $6\sigma_x$. Um Rechenzeit zu sparen, kann die Seitenlänge in den späteren Filterschritten allmählich auf $2\sigma_x$ erniedrigt werden, ohne daß nennenswerte Änderungen im Ergebnis entstehen.

5.2 Parallelisierung

Jeder Filterschritt kann massiv parallel ausgeführt werden, indem man mit je einem Prozessor für jedes Pixel p die Werte $G_{\sigma_x,\sigma_z} f(p)$ simultan berechnet. Praktisch eingesetzt wurde ein PowerXplorer von Parsytec mit 8 Prozessoren (PowerPC 601), von denen jeder einen Streifen des Bildes gefiltert hat. Die folgende Tabelle enthält die Ausführungszeit für eine 3-stufige Filterkette auf dem einer SUN SparcStation 20/50 und auf dem PowerXplorer (einschließlich des Ladens und Speicherns der Bilddaten sowie des Austausches der Ergebnisse nach jedem Filterschritt).

Rechenzeiten für eine 3-stufige Filterkette

auf einer SPARCstation 20/50
und auf einem PowerXplorer mit 8 Prozessoren

σ_x der 1. Stufe	Größe 20/50	512×512 Xplorer	Größe 20/50	256×256 Xplorer
0.5	11 s	8 s	3 s	2.3 s
1.0	24 s	10 s	6 s	2.5 s
2.0	65 s	15 s	16 s	4 s
4.0	205 s	32 s	52 s	8 s
8.0	817 s	100 s	184 s	24 s

5.3 Modifikation der letzten Filterstufe

Berechne die Gewichte wie bisher, mittele jedoch das Eingangssignal f_{in} der Filterkette statt das Ausgangssignal f der vorletzten Filterstufe. Für jedes $p \in \mathcal{P}$ wird also folgender Wert berechnet

$$G_{\sigma_x,\sigma_z} f(p) = \frac{1}{N_p} \sum_{q \in \mathcal{P}} g_{\sigma_x}(\|q-p\|)\, g_{\sigma_z}(f(q)-f(p))\, f_{in}(q),$$

$$\text{wobei} \quad N_p = \sum_{q \in \mathcal{P}} g_{\sigma_x}(\|q-p\|)\, g_{\sigma_z}(f(q)-f(p)).$$

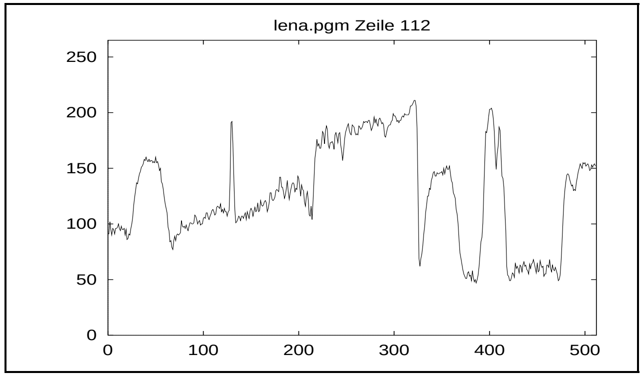
Dies ist eine kantenrespektierende Mittelwertbildung, wobei die Information über die Lage der Kanten dem Ergebnis f des vorletzten Filterschritts entnommen wird.

6. Eigenschaften der Filterkette

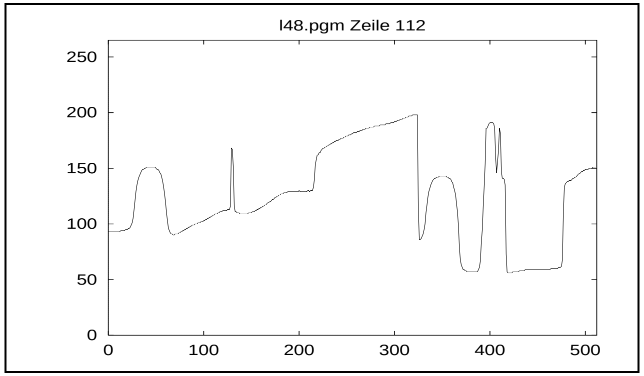
- skalierbar durch die beiden anschaulichen Parameter σ_x und σ_z der ersten Filterstufe:
  Bildstrukturen, deren Größe unterhalb von σ_x und deren Kontrast unterhalb von σ_z liegen, werden eliminiert.
- keine Verschiebung der Kanten
- massiv parallelisierbar
- numerisch robust
- in praktischen Implementierungen nur lokale Operationen
- funktioniert in jeder Dimension
- funktioniert auch für vektorwertige Signale

7. Beispiele

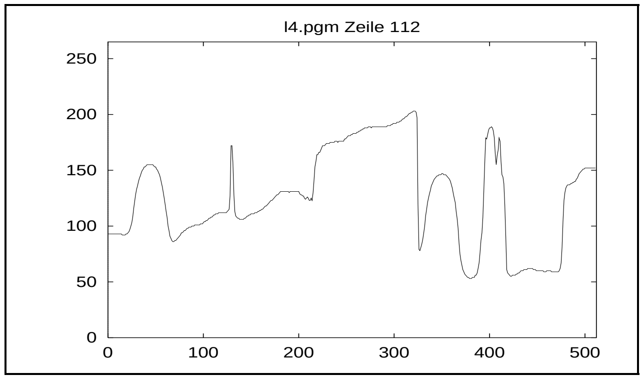
112-te Zeile des Bildes Lena nach den einzelnen Filterschritten



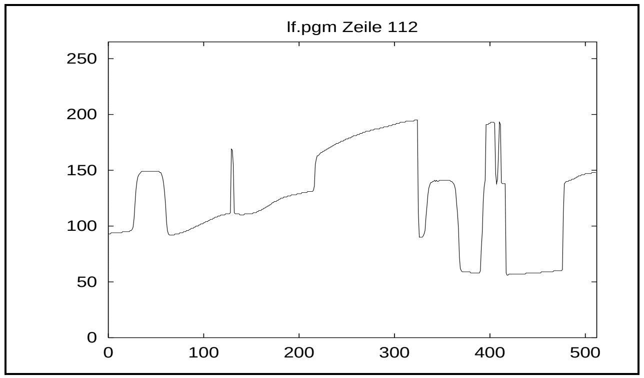
Eingangssignal



nach dem 2. Filterschritt

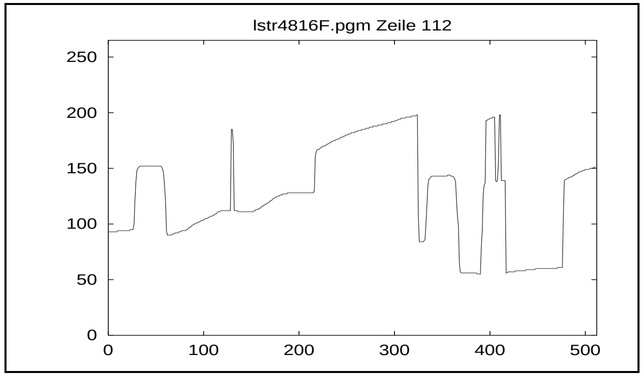


nach dem 1. Filterschritt

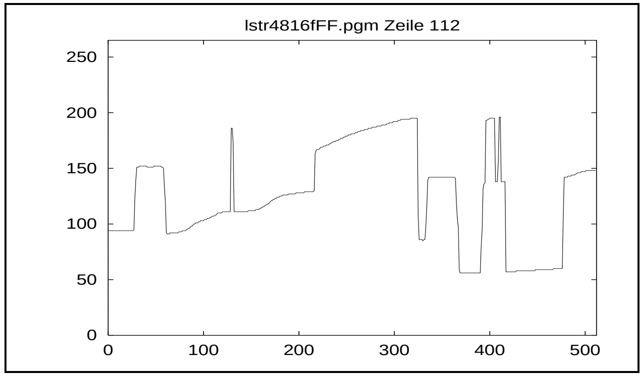


nach dem 3. Filterschritt

Wirkung der Modifikation



Ergebnis mit
modifizierter
letzter Filterstufe



Ergebnis mit
zwei modifizierten
letzten Filterstufen

8. Theoretische Motivation

8.1 Lineare Diffusion

Sie wird beschrieben durch die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \triangle u \quad \text{mit} \qquad u(p,0) = f(p) \text{ für alle } \; p \in \mathbb{R}^2.$$

Ihre Lösung ist darstellbar als Faltungsintegral

$$u(p,t) = \frac{1}{4\pi t} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{\|q-p\|^2}{4t}} f(q)\,dq.$$

Für festes $t = \frac{1}{2}\sigma_x^2$ ist

$$f \;\mapsto\; G_{\sigma_x} f(p) \;=\; u(p, \frac{1}{2}\sigma_x^2) \;=\; \frac{1}{2\pi\sigma_x^2} \int_{\mathbb{R}^2} g_{\sigma_x}(\|q-p\|)\; f(q)\,dq$$

ein lineares Gaußfilter mit Varianz σ_x.

8.2 Nichtlineare kantenerhaltende Diffusion

Üblicher Ansatz:

Modifiziere die Wärmeleitungsgleichung so, daß der Wärmetransport an Stellen mit großem Gradienten verringert wird.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(h \cdot \operatorname{grad})u$$

mit $\quad u(p, 0) = f(p)$ für alle $p \in \mathbb{R}^2$

Dieses nichtlineare Anfangswertproblem muß numerisch gelöst werden.

Unser Ansatz:

Multipliziere in der Darstellung der Lösung als Faltungsintegral den Gaußkern mit einer glockenförmigen, von $|f(q) - f(p)|$ abhängenden Funktion, z.B. mit $g_{\sigma_z}(|f(q) - f(p)|)$, und normiere das Gesamtgewicht wieder auf 1. Für $t = \frac{1}{2}\sigma_x^2$ ergibt sich dann das nichtlineare Filter

$$G_{\sigma_x,\sigma_z} f(p) = \frac{1}{N(p,f)} \int_{\mathbb{R}^2} g_{\sigma_x}(\|q-p\|)\, g_{\sigma_z}(|f(q) - f(p)|)\, f(q)$$

mit $$N(p,f) = \int_{\mathbb{R}^2} g_{\sigma_x}(\|q-p\|)\, g_{\sigma_z}(|f(q) - f(p)|)$$

Diese Formel ist numerisch leicht auszuwerten und unempfindlich gegenüber kleinen Änderungen der Gewichtsfunktionen g_{σ_x} und g_{σ_z}.